

第一章 生存分布与生命表

寿险精算数学

Piple Lee 整理

二〇〇六年六月~二〇〇六年九月

1. 设连续型未来寿命随机变量为 $T(x)=X-x$ ，则其分布函数为

$${}_t|uq_x = {}_t p_x - {}_{t+u} p_x = {}_t + u q_x - {}_t q_x = {}_t p_x \cdot {}_u q_{x+t}。$$

2. 设离散型未来寿命的周年数随机变量 $K(x)=[T(x)]$ ，则其分布函数为

$${}_k|q_x = {}_k p_x - {}_{k+1} p_x = {}_{k+1} q_x - {}_k q_x = {}_k p_x \cdot {}_q_{x+k}。$$

3. 死力 μ_x 的性质

(1)当 $x \geq 0$ 时， $\mu_x \geq 0$;

(2)对于任意 $x \geq 0$ ， 都有 $\int_x^{+\infty} \mu_s ds = +\infty$ ；

(3) $\int_0^{+\infty} {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt = 1$ 。

4. 死力 μ_x 与随机变量 $T(x)$ 的分布函数、密度函数、生存函数之间的关系式

	${}_t q_x$	$f_T(t)$	${}_t p_x$	μ_x
分布函数 ${}_t q_x$		$\int_0^x f(t) dt$	$1-S(x)$	$1-\exp(-\int_0^x \mu_s ds)$
密度函数 $f_T(t)$	$F'(x)$		$-S'(x)$	$\exp(-\int_0^x \mu_s ds) \cdot \mu_x$
生存函数 ${}_t p_x$	$1-F(x)$	$1-\int_0^x f(t) dt$		$\exp(-\int_0^x \mu_s ds)$
死力 μ_x	$\frac{F'(x)}{1-F(x)}$	$\frac{f(x)}{\int_x^\infty f(t) dt}$	$\frac{-S'(x)}{S(x)}$	

5. 死力的解析形式

解析形式	μ_x	$S(x)$
De Moivre 形式	$\frac{1}{\omega - x} (0 \leq x < \omega)$	$1 - \frac{x}{\omega}$
Gompertz 形式	$B \cdot c^x (B > 0, c > 1) (x \geq 0)$	$\exp[\frac{B}{\ln c} (1 - c^x)]$
Makeham 形式	$A + B \cdot c^x (B > 0, c > 1, A > -B) (x \geq 0)$	$\exp[\frac{B}{\ln c} (1 - c^x) - Ax]$

Weibull 形式	$k \cdot x^n \ (k>0, n>0) \ (x \geq 0)$	$\exp(-\frac{kx^{n+1}}{n+1})$
------------	---	-------------------------------

6. 生命表函数

$$\text{生存人数 } l_x = l_0 \cdot S(x)$$

$$\text{死亡人数 } d_x = l_x - l_{x+1}$$

$${}_n d_x = l_x - l_{x+n}$$

$$\text{生存人年数 } L_x = \int_0^1 l_{x+t} dt$$

$$\text{累积生存人年数 } T_x = \sum_x L_x = \int_0^{+\infty} l_{x+t} dt$$

$$\text{平均余命 } \dot{e}_x = \frac{T_x}{l_x} = E[T(x)] = \int_0^{+\infty} t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt = \int_0^{+\infty} {}_t p_x dt = \frac{1}{l_x} \int_0^{+\infty} l_{x+t} dt$$

$$\dot{e}_0 = \frac{T_0}{l_0}$$

$$\text{平均生存函数 } \alpha(x) = \frac{\int_0^1 t \cdot l_{x+t} \mu_{x+t} dt}{\int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t} dt} = \frac{L_x - l_{x+1}}{l_x - l_{x+1}}, \text{ 于是 } L_x = \alpha(x) l_x + [1 - \alpha(x)] l_{x+1}$$

$$\text{简约平均余命 } e_x = E[K(x)] = \sum_{k \geq 0} k \cdot {}_k q_x = \sum_{k \geq 0} k \cdot ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x)$$

7. 生命表函数之间的关系

$$p_x = \frac{S(x+1)}{S(x)} = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$$q_x = 1 - \frac{S(x+1)}{S(x)} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}$$

$${}_t p_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$${}_t q_x = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)} = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{{}_t d_x}{l_x}$$

$$e_x = \frac{\sum_{x+1}^{\infty} l_x}{l_x}$$

$$l_x = l_0 \cdot \exp(-\int_0^x \mu_s ds)$$

$${}_t d_x = l_x - l_{x+t} = \int_x^{x+t} \mu_s ds$$

$$8. \ D[T(x)] = 2 \int_0^{\infty} t \cdot {}_t p_x dt - \dot{e}_x^2 \quad D[K(x)] = 2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot {}_{k+1} p_x \right) - e_x^2$$

9. 尾龄的分布假设(0 ≤ t ≤ 1)

生命表函数	死亡均匀分布(UDD)假设	常值死力(CFM)假设	Balducci 假设
$S(x+t)$	$(1-t) \cdot S(x) + t \cdot S(x+1)$	$S(x+t) = S(x) e^{-\mu_x t}$	$[(1-t) \cdot \frac{1}{S(x)} + t \cdot \frac{1}{S(x+1)}]^{-1}$
l_{x+t}	$l_x - t \cdot d_x$	$l_{x+t} = l_x e^{-\mu_x t}$	$[(1-t) \cdot \frac{1}{l_x} + t \cdot \frac{1}{l_{x+1}}]^{-1}$
${}_t p_x$	$1 - t \cdot q_x$	$e^{-\mu_x t}$	$\frac{p_x}{p_x + t(1-p_x)} = \frac{1-q_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_t q_x$	$t \cdot q_x$	$1 - e^{-\mu_x t}$	$\frac{t \cdot q_x}{1 - (1-t)q_x}$
${}_s q_{x+t}$	$\frac{s \cdot q_x}{1 - t \cdot q_x}$	$1 - e^{-\mu_x s}$	$\frac{s \cdot q_x}{1 - (1-t-s)q_x}$
μ_{x+t}	$\frac{q_x}{1 - t \cdot q_x}$	$\mu_x = -\ln p_x$	$\frac{q_x}{1 - (1-t)q_x}$
${}_t p_x \cdot \mu_{x+t}$	q_x	$\mu_x e^{-\mu_x t}$	$\frac{q_x(1-q_x)}{[1 - (1-t)q_x]^2}$
\dot{e}_x	$e_x + \frac{1}{2}$		

10. 选择-终极生命表

选择生命表

选择期

终极生命表

第二章 趸缴纯保费

1. 离散型人寿保险模型与连续型人寿保险模型的趸缴纯保费

单位保额趸缴纯保费 $Z=v^T$	离散型人寿保险模型	连续型人寿保险模型
换算函数	$C_x = v^{x+1}d_x$ $D_x = v^x l_x$ $M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}$ $N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}$ $R_x = \sum_{k=0}^{\infty} M_{x+k}$ $S_x = \sum_{k=0}^{\infty} N_{x+k}$	$\bar{C}_x = \int_0^1 D_{x+t} \mu_{x+t} dt$ $\bar{M}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{C}_{x+k} = \int_0^{\infty} D_{x+t} \mu_{x+t} dt$ $\bar{R}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{M}_{x+k}$
利力与折现系数		$\delta = -\ln v$ $v = e^{-\delta}$
终身寿险	$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_k q_x = \frac{M_x}{D_x}$ 递推方程式 $A_x = vq_x + vp_x \cdot A_{x+1}$ $(1+i)l_x A_x = l_x A_{x+1} + d_x(1-A_{x+1})$ $A_{x+1} - A_x = iA_x - q_x(1-A_{x+1})$	$\bar{A}_x = \int_0^{+\infty} v^t \cdot {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \frac{\bar{M}_x}{D_x}$ 微分方程式 $\frac{d}{dx}(\bar{A}_x) = \delta \bar{A}_x - \mu_x(1 - \bar{A}_x)$
		${}^2\bar{A}_x = \int_0^{+\infty} v^{2t} \cdot {}_t p_x \mu_{x+t} dt$
		$D(Z) = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2$

延期 h 年的终身寿险	${}_h A_x = \sum_{k=h}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_k q_x = A_x - A_{x:h}^1 = A_{x:h}^1 \cdot A_{x+h} = \frac{M_{x+h}}{D_x}$	${}_h \bar{A}_x = \int_h^{+\infty} v^t \cdot {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \frac{\bar{M}_{x+h}}{D_x}$
		${}_h {}^2\bar{A}_x = \int_h^{+\infty} v^{2t} \cdot {}_t p_x \mu_{x+t} dt$
n 年定期死亡保险	$A_{x:n}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_k q_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$	$\bar{A}_{x:n}^1 = \int_0^n v^t \cdot {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{D_x}$
	${}^2A_{x:n}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)} \cdot {}_k q_x$	${}^2\bar{A}_{x:n}^1 = \int_0^n v^{2t} \cdot {}_t p_x \mu_{x+t} dt$
	$D(Z) = {}^2A_{x:n}^1 - (A_{x:n}^1)^2$	$D(Z) = {}^2\bar{A}_{x:n}^1 - (\bar{A}_{x:n}^1)^2$
1 年定期死亡保险	$c_x = A_{x:1}^1 = \frac{C_x}{D_x}$	
n 年定期生存保险	$A_{x:n}^{\frac{1}{2}} = v^n \cdot {}_n p_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$	
n 年定期两全保险 (死亡保险+生存保险)	$A_{x:n} = A_{x:n}^1 + A_{x:n}^{\frac{1}{2}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$	$\bar{A}_{x:n} = \bar{A}_{x:n}^1 + A_{x:n}^{\frac{1}{2}} = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$
		${}^2\bar{A}_{x:n} = {}^2\bar{A}_{x:n}^1 + v^{2n} \cdot {}_n p_x$
延期 h 年的 n 年定期死亡保险	${}_h A_{x:n}^1 = {}_h A_x = \sum_{k=h}^{h+n-1} v^{k+1} \cdot {}_k q_x$	${}_h \bar{A}_{x:n}^1 = {}_h \bar{A}_x = \int_h^{h+n} v^t \cdot {}_t p_x \mu_{x+t} dt$

	$= A_{x:h+n}^1 - A_{x:h}^1 = A_{x:h}^1 \cdot A_{x+h:n}^1 = \frac{M_{x+h} - M_{x+h+n}}{D_x}$	$= \frac{\bar{M}_{x+h} - \bar{M}_{x+h+n}}{D_x}$
延期 h 年的 n 年定期生存保险	${}_h A_{x:n}^1 = v^{h+n} \cdot {}_{h+n}P_x$	
延期 h 年的 n 年定期两全保险	${}_h A_{x:n}^1 = {}_h A_{x:n}^1 + {}_h \bar{A}_{x:n}^1 = A_{x:h}^1 \cdot A_{x+h:n}^1$	${}_h \bar{A}_{x:n}^1 = {}_h \bar{A}_{x:n}^1 + {}_h A_{x:n}^1 = \frac{\bar{M}_{x+h} - \bar{M}_{x+h+n} + D_{x+h+n}}{D_x}$
递增保额的终身寿险	$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)v^{k+1} \cdot {}_k q_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k A_x = \frac{R_x}{D_x}$	$\begin{aligned} (I\bar{A})_x &= \int_0^{+\infty} [t+1]v^t \cdot {}_tP_x \mu_{x+t} dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{k-1}^k v^t \cdot {}_tP_x \mu_{x+t} dt = \frac{\bar{R}_x}{D_x} \end{aligned}$
每年递增 m 次的递增保额终身寿险		$(I^{(m)}\bar{A})_x = \int_0^{+\infty} \frac{[mt+1]}{m} v^t \cdot {}_tP_x \mu_{x+t} dt$
连续递增的递增保额终身寿险		$\begin{aligned} (I\bar{A})_x &= \int_0^{+\infty} tv^t \cdot {}_tP_x \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_s^{+\infty} v^t \cdot {}_tP_x \mu_{x+t} dt \right) ds = \int_0^{+\infty} {}_s \bar{A}_x ds \end{aligned}$
递增保额的 n 年定期死亡保险	$\begin{aligned} (IA)_{x:n}^1 &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)v^{k+1} \cdot {}_k q_x = \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x} \\ &= \frac{R_x - (n+1)R_{x+n} + nR_{x+n+1}}{D_x} \end{aligned}$	$\begin{aligned} (I\bar{A})_{x:n}^1 &= \int_0^n [t+1]v^t \cdot {}_tP_x \mu_{x+t} dt \\ &= \sum_{k=1}^n k \int_{k-1}^k v^t \cdot {}_tP_x \mu_{x+t} dt \end{aligned}$

		$= \frac{\bar{R}_x - \bar{R}_{x+n} - n\bar{M}_{x+n}}{D_x}$
递减保额的 n 年定期死亡保险	$\begin{aligned} (DA)_{x:n}^1 &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)v^{k+1} \cdot {}_k q_x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) {}_k A_{x:n-k}^1 = \sum_{k=1}^n A_{x:k}^1 \\ &= \frac{nM_x - (R_{x+1} - R_{x+n+1})}{D_x} \end{aligned}$	$\begin{aligned} (D\bar{A})_{x:n}^1 &= \int_0^n (n-[t])v^t \cdot {}_tP_x \mu_{x+t} dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \int_k^{k+1} v^t \cdot {}_tP_x \mu_{x+t} dt \\ &= \frac{n\bar{M}_x - (\bar{R}_{x+1} - \bar{R}_{x+n+1})}{D_x} \end{aligned}$

2. 在死亡均匀分布假设下, \bar{A}_x 与 A_x 之间的关系

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} \cdot A_x$$

$$(\bar{IA})_x = \frac{i}{\delta} \cdot (IA)_x$$

$$\bar{A}_{x:n|}^1 = \frac{i}{\delta} \cdot A_{x:n|}^1$$

$$(\bar{IA})_{x:n|}^1 = \frac{i}{\delta} \cdot (IA)_{x:n|}^1$$

$$\bar{A}_{x:n|} = \frac{i}{\delta} \cdot A_{x:n|}^1 + A_{x:n|}^{\frac{1}{d}}$$

$$(\bar{IA})_x = \frac{i}{\delta} \cdot [(IA)_x - (\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta})A_x]$$

$${}_h|\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} \cdot {}_h|A_x$$

$$({D\bar{A}})_{x:n|}^1 = \frac{i}{\delta} \cdot (DA)_{x:n|}^1$$

$${}_h|{}_n\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} \cdot {}_h|{}_nA_x$$

$${}_h|\bar{A}_{x:n|} = \frac{i}{\delta} \cdot {}_h|A_{x:n|}^1 + {}_h|A_{x:n|}^{\frac{1}{d}}$$

3. 生存年金的计算方法: 现时支付法, 总额支付法。

保额为 1 个单位的 n 年期生存保险的精算现值(生存年金)表示为 ${}_nE_x = v^n \cdot {}_n p_x$ 。

生存年金	离散型生存年金		连续型生存年金 $\bar{a}_{\overline{T} }$
	期初付生存年金 $\ddot{a}_{\overline{T} }$	期末付生存年金 $a_{\overline{T} }$	
换算函数			$\bar{N}_x = \int_0^{+\infty} D_{x+t} dt$ <p>在死亡均匀分布假设条件下</p> $\bar{N}_x = \frac{id}{\delta^2} N_x + \frac{\delta - i}{\delta^2} D_x$
终身生存年金	$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k} } \cdot {}_k q_x$ $= \frac{N_x}{D_x} = \frac{1}{d} (1 - A_x)$ $1 = d\ddot{a}_x + A_x$ <p>递推方程式 $\ddot{a}_x = 1 + {}_1E_x \ddot{a}_{x+1}$</p>	$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} = \ddot{a}_x - 1 = v\ddot{a}_x - A_x$ $= \frac{1}{i} [1 - (1+i)A_x]$ $1 = ia_x + (1+i)A_x$	$\bar{a}_x = \int_0^{+\infty} v^t \cdot {}_t p_x dt = \int_0^{+\infty} \bar{a}_{\overline{t} } \cdot {}_t p_x \mu_{x+t} dt$ $= \frac{\bar{N}_x}{D_x} = \frac{1}{\delta} (1 - \bar{A}_x)$ $1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$
	$D(a_{\overline{k} }) = \frac{1}{d^2} [{}^2A_x - (A_x)^2]$		$D(\bar{a}_{\overline{T} }) = \frac{1}{\delta^2} [{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2]$
延期 h 年的 终身生存年金	${}_h \ddot{a}_x = \sum_{k=h}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x = \frac{N_{x+h}}{D_x}$ $= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:h } = {}_hE_x \cdot \ddot{a}_{x+h}$	${}_h a_x = \sum_{k=h+1}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x$ $= a_x - a_{x:h } = {}_h a_x - v^h \cdot {}_h p_x$	${}_h \bar{a}_x = \int_h^{\infty} v^t \cdot {}_t p_x dt = \frac{\bar{N}_{x+h}}{D_x}$ $= \bar{a}_x - \bar{a}_{x:h } = {}_hE_x \cdot \bar{a}_{x+h} = \frac{1}{\delta} (\bar{A}_{x:h } - \bar{A}_x)$

	递推方程式 ${}_h \ddot{a}_x = {}_1E_x {}_h \ddot{a}_{x+1} + v^h \cdot {}_h p_x$		
			$D(\bar{a}_{\overline{T} }) = \frac{2}{\delta} v^{2h} {}_h p_x (\bar{a}_{x+h} - {}^2\bar{a}_{x+h}) - ({}_h \bar{a}_x)^2$
n 年定期生存年金	$\ddot{a}_{x:n } = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_k p_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$ $= \frac{1}{d} (1 - A_{x:n })$ $1 = d\ddot{a}_{x:n } + A_{x:n }$ <p>递推方程式</p> $\ddot{a}_{x:n } = 1 + {}_1E_x \ddot{a}_{x+1:n } - v^n \cdot {}_n p_x$	$a_{x:n } = \sum_{k=1}^n v^k \cdot {}_k p_x$ $= \ddot{a}_{x:n } - 1 + {}_nE_x = v\ddot{a}_{x:n } - A_{x:n }^1$ $1 = i\ddot{a}_{x:n } + iA_{x:n }^1 + A_{x:n }$	$\bar{a}_{x:n } = \int_0^n v^t \cdot {}_t p_x dt = \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}{D_x}$ $= \frac{1}{\delta} (1 - \bar{A}_{x:n })$ $1 = \delta \bar{a}_{x:n } + \bar{A}_{x:n }$ <p>微分方程式</p> $\frac{\partial}{\partial x} (\bar{a}_{x:n }) = (\mu_x + \delta) \bar{a}_{x:n } - (1 - {}_nE_x)$
			$D(\bar{a}_{\overline{T} }) = \frac{1}{\delta^2} [{}^2\bar{A}_{x:n } - (\bar{A}_{x:n })^2]$ $= \frac{2}{\delta} (\bar{a}_{x:n } - {}^2\bar{a}_{x:n }) - (\bar{a}_{x:n })^2$
	$\ddot{s}_{x:n } = \frac{1}{nE_x} \ddot{a}_{x:n }$	$s_{x:n } = \frac{1}{nE_x} a_{x:n }$	$\bar{s}_{x:n } = \frac{1}{nE_x} \bar{a}_{x:n }$
延期 h 年的 n 年定期生存年金	${}_h n\ddot{a}_x = \sum_{k=h}^{h+n-1} v^k \cdot {}_k p_x = \frac{N_{x+h} - N_{x+h+n}}{D_x}$		${}_h n\bar{a}_x = \int_h^{h+n} v^t \cdot {}_t p_x dt = \frac{\bar{N}_{x+h} - \bar{N}_{x+h+n}}{D_x}$

	$= \ddot{a}_{x:\overline{h+n} } - \ddot{a}_{x:\overline{h} } = {}_hE_x \cdot \ddot{a}_{x+h:\overline{n} }$		$= \bar{a}_{x:\overline{h+n} } - \bar{a}_{x:\overline{h} } = {}_h\bar{a}_x - {}_{h+n}\bar{a}_x$ $= {}_hE_x \cdot \bar{a}_{x+h:\overline{n} } = \frac{1}{\delta} (\bar{A}_{x:\overline{h} } - \bar{A}_{x:\overline{h+n} })$
递增保额的 终身生存年金	$(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)v^k \cdot {}_k p_x = \frac{S_x}{D_x}$	$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}$	
递增保额的 n 年定期生存年金	$(I\ddot{a})_{x:\overline{n} } = \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x}$		
递减保额的 n 年定期生存年金		$(Da)_{x:\overline{n} } = \frac{nN_{x+1} - (S_{x+2} - S_{x+n+2})}{D_x}$	
每年付 m 次	令 $\alpha(m) = \frac{id}{{}_i^{(m)}d^{(m)}}$, $\beta(m) = \frac{{}_i^{(m)} - i}{{}_i^{(m)}d^{(m)}}$		
每年付 m 次的 终身生存年金	$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} v^{k/m} \cdot {}_{k/m} p_x$ $= \frac{1}{d^{(m)}} (1 - A_x^{(m)})$ $1 = d^{(m)} \ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}$ <p>尾龄服从死亡均匀分布假设下</p> $\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m) \ddot{a}_x + \beta(m) \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$	$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m}$ $\approx \ddot{a}_x - \frac{m+1}{2m}$	

	递推方程式 $\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{x:1 }^{(m)} + {}_1E_x \ddot{a}_{x+1}^{(m)}$		
延期 h 年 每年付 m 次的 终身生存年金	${}_h\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \ddot{a}_{x:\overline{h} }^{(m)} = {}_hE_x \cdot \ddot{a}_{x+h}^{(m)}$ <p>尾龄服从死亡均匀分布假设下</p> ${}_h\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m) {}_h\ddot{a}_x + \beta(m) {}_hE_x$ $\approx {}_h\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} {}_hE_x$	${}_h a_x^{(m)} = a_x^{(m)} - a_{x:\overline{h} }^{(m)} = {}_h\ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m} {}_hE_x$	
每年付 m 次的 n 年定期生存年金	$\ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - {}_n\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - {}_nE_x \cdot \ddot{a}_{x+n}^{(m)}$ <p>尾龄服从死亡均匀分布假设下</p> $\ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)} = \alpha(m) \ddot{a}_{x:\overline{n} } + \beta(m) (1 - {}_nE_x)$ $\approx \ddot{a}_{x:\overline{n} } - \frac{m-1}{2m} (1 - {}_nE_x)$	$a_{x:\overline{n} }^{(m)} = \ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)} - \frac{1}{m} (1 - {}_nE_x)$	
每年付 m 次的 递变保额的 n 年定期生存年金	$(apv)_x = \sum_{k=0}^{n-1} b_{x+k} \ddot{a}_{x+k:1 }^{(m)} \cdot {}_k p_x E_x$ <p>递推方程式</p> $(apv)_x = b_x \ddot{a}_{x:1 }^{(m)} + {}_1E_x (apv)_{x+1}$		

4. 完全期末年金与比例期初年金

每年付 m 次	完全期末年金	相互间关系	比例期初年金
终身 生存年金	$\dot{a}_x^{(m)} = \frac{\delta}{i^{(m)}} \bar{a}_x$ $1 = i^{(m)} \dot{a}_x^{(m)} + \bar{A}_x$ $\dot{a}_x^{(1)} = \dot{a}_x = \frac{\delta}{i} \bar{a}_x$	$a_x^{(m)} < \dot{a}_x^{(m)} < \bar{a}_x < \ddot{a}_x^{(m)} < \ddot{a}_x^{(m)}$ $\ddot{a}_x^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} \dot{a}_x^{(m)}$	$\ddot{a}_x^{\{m\}} = \frac{\delta}{d^{(m)}} \bar{a}_x$ $1 = d^{(m)} \ddot{a}_x^{\{m\}} + \bar{A}_x$ $\ddot{a}_x^{\{1\}} = \frac{\delta}{d} \bar{a}_x$
延期 h 年的 终身 生存年金	${}_h \dot{a}_x^{(m)} = \frac{\delta}{i^{(m)}} {}_h \bar{a}_x$ ${}_h \dot{a}_x^{(1)} = {}_h \dot{a}_x = \frac{\delta}{i} {}_h \bar{a}_x$	${}_h \ddot{a}_x^{\{m\}} = (1+i)^{\frac{1}{m}} {}_h \dot{a}_x^{(m)}$	${}_h \ddot{a}_x^{\{m\}} = \frac{\delta}{d^{(m)}} {}_h \bar{a}_x$ ${}_h \ddot{a}_x^{\{1\}} = \frac{\delta}{d} {}_h \bar{a}_x$
n 年定期 生存年金	$\dot{a}_{x:n }^{(m)} = \frac{\delta}{i^{(m)}} \bar{a}_{x:n }$ $\dot{a}_{x:n }^{(1)} = \dot{a}_{x:n } = \frac{\delta}{i} \bar{a}_{x:n }$	$\ddot{a}_{x:n }^{\{m\}} = (1+i)^{\frac{1}{m}} \dot{a}_{x:n }^{(m)}$	$\ddot{a}_{x:n }^{\{m\}} = \frac{\delta}{d^{(m)}} \bar{a}_{x:n }$ $\ddot{a}_{x:n }^{\{1\}} = \frac{\delta}{d} \bar{a}_{x:n }$

第三章 均衡纯保费

1. 纯保费计算原理：未来给付保险金额现值的期望值(即趸缴纯保费)等于未来缴纳纯保费的精算现值，又称为平衡原理或精算等价原理。若用 L 表示保险给付金额现值与被保险人缴付纯保费现值之差，即 L 为保险人的未来损失的现值随机变量，则平衡原理又可表述为 $E(L)=0$ 。

2. 年缴纯保费的分类

(1)全离散式寿险模型的年缴纯保费：纯保费分若干次于年初缴付；死亡受益金于被保险人死亡年末给付；

(2)全连续式寿险模型的年缴纯保费：纯保费按连续方式缴付，死亡受益金于被保险人死亡时立即给付；

(3)半连续式寿险模型的年缴纯保费：纯保费分若干次于年初缴付；死亡受益金于被保险人死亡时立即给付。

(4)每年真实分 m 次缴付的年缴纯保费；

(5)比例保费：纯保费分若干次于年初缴付；死亡受益金于被保险人死亡时立即给付，并根据死亡时间与下一次预定缴费时间间隔长短退还部分保费。

3. 年缴纯保费的计算

年缴纯保费 P	全离散式寿险模型	全连续式寿险模型	半连续式寿险模型	每年真实分 m 次缴付	比例保费
(终身缴费) 终身寿险	$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$ $= \frac{1 - d\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x} = \frac{dA_x}{1 - A_x}$	$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$ $= \frac{1 - \delta\bar{a}_x}{\bar{a}_x} = \frac{\delta\bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x}$	$P(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x}$ $= \frac{i}{\delta} P_x$ (UDD)	$P_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$ $= \frac{d^{(m)} A_x}{1 - \frac{i}{i^{(m)}} A_x}$ (UDD)	$P^{(m)}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$ $= \frac{d^{(m)}}{\delta} \bar{P}(\bar{A}_x)$
	$D(L) = (1 + \frac{P_x}{d})^2 ({}^2A_x - A_x^2)$ $= \frac{1}{(d\ddot{a}_x)^2} ({}^2A_x - A_x^2)$ $= \frac{1}{(1 - A_x)^2} ({}^2A_x - A_x^2)$	$D(L) = [1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}]^2 [{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2]$ $= \frac{1}{(\delta\bar{a}_x)^2} [{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2]$ $= \frac{1}{(1 - \bar{A}_x)^2} [{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2]$		$P(\bar{A}_x^{\text{PR}}) = P^{(1)}(\bar{A}_x) - P(\bar{A}_x)$ $= \frac{\bar{A}_x(\bar{A}_x - A_x)}{(1 - \bar{A}_x)\ddot{a}_x}$	
h 年限期缴费 终身寿险	${}_hP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h} }}$	${}_h\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{h} }}$	${}_hP(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h} }}$ $= \frac{i}{\delta} {}_hP_x$ (UDD)	${}_hP_x^{(m)} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h} }^{(m)}}$ $= \frac{d^{(m)} A_x}{1 - {}_hE_x - \frac{i}{i^{(m)}} A_{x:\overline{h} }}$ (UDD)	

(n 年缴费) n 年定期保险	$P_{x:n}^1 = \frac{A_{x:n}^1}{\ddot{a}_{x:n}^1}$	$\bar{P}(\bar{A}_{x:n}^1) = \frac{\bar{A}_{x:n}^1}{\bar{a}_{x:n}^1}$ $= \frac{1 - \delta\bar{a}_{x:n}^1 - {}_nE_x}{\bar{a}_{x:n}^1} = \frac{\delta\bar{A}_{x:n}^1}{1 - \bar{A}_{x:n}^1}$	$P(\bar{A}_{x:n}^1) = \frac{\bar{A}_{x:n}^1}{\ddot{a}_{x:n}^1}$ $= \frac{i}{\delta} P_{x:n}^1$ (UDD)	$P_{x:n}^{1(m)} = \frac{A_{x:n}^1}{\ddot{a}_{x:n}^{1(m)}}$ $= \frac{d^{(m)} A_{x:n}^1}{1 - {}_nE_x - \frac{i}{i^{(m)}} A_{x:n}^1}$ (UDD)	
(n 年缴费) n 年生存保险	$P_{x:n}^{\frac{1}{-}} = \frac{A_{x:n}^{\frac{1}{-}}}{\ddot{a}_{x:n}^{\frac{1}{-}}}$	$\bar{P}(A_{x:n}^{\frac{1}{-}}) = \frac{A_{x:n}^{\frac{1}{-}}}{\bar{a}_{x:n}^{\frac{1}{-}}}$			
(n 年缴费) n 年两全保险	$P_{x:n}^- = \frac{A_{x:n}^-}{\ddot{a}_{x:n}^-}$	$\bar{P}(\bar{A}_{x:n}^-) = \frac{\bar{A}_{x:n}^-}{\bar{a}_{x:n}^-}$ $= \frac{1 - \delta\bar{a}_{x:n}^-}{\bar{a}_{x:n}^-} = \frac{\delta\bar{A}_{x:n}^-}{1 - \bar{A}_{x:n}^-}$	$P(\bar{A}_{x:n}^-) = \frac{\bar{A}_{x:n}^-}{\ddot{a}_{x:n}^-}$ $= \frac{i}{\delta} P_{x:n}^1 + P_{x:n}^{\frac{1}{-}}$ (UDD)	$P_{x:n}^{-(m)} = \frac{A_{x:n}^-}{\ddot{a}_{x:n}^{-(m)}}$ $= \frac{d^{(m)} A_{x:n}^-}{1 - {}_nE_x - \frac{i}{i^{(m)}} A_{x:n}^1}$ (UDD)	
h 年限期缴费 n 年定期保险	${}_hP_{x:n}^1 = \frac{A_{x:n}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{h} }^1}$	${}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:n}^1) = \frac{\bar{A}_{x:n}^1}{\bar{a}_{x:\overline{h} }^1}$	${}_hP(\bar{A}_{x:n}^1) = \frac{\bar{A}_{x:n}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{h} }^1}$	${}_hP_{x:n}^{1(m)} = \frac{A_{x:n}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{h} }^{1(m)}}$	${}_hP^{(m)}(\bar{A}_{x:n}^1) = \frac{\bar{A}_{x:n}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{h} }^{(m)}}$

			$= \frac{i}{\delta} {}_hP_{x:\overline{n} }^1$ <p>(UDD)</p>	$= \frac{d^{(m)} A_{x:\overline{n} }^1}{1 - {}_hE_x - \frac{i}{i^{(m)}} A_{x:\overline{n} }^1}$ <p>(UDD)</p>	$= \frac{d^{(m)}}{\delta} {}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n} }^1)$
h 年限期缴费 n 年生存保险	${}_hP_{x:\overline{n} }^1 = \frac{A_{x:\overline{n} }^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n} }}$	${}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n} }^1) = \frac{A_{x:\overline{n} }^1}{\bar{a}_{x:\overline{n} }}$			
h 年限期缴费 n 年两全保险	${}_hP_{x:\overline{n} } = \frac{A_{x:\overline{n} }}{\ddot{a}_{x:\overline{n} }}$	${}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n} }) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n} }}{\bar{a}_{x:\overline{n} }}$	${}_hP(\bar{A}_{x:\overline{n} }) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n} }}{\ddot{a}_{x:\overline{n} }}$ $= \frac{i}{\delta} {}_hP_{x:\overline{n} }^1 + {}_hP_{x:\overline{n} }^1$ <p>(UDD)</p>	${}_hP_{x:\overline{n} }^{(m)} = \frac{A_{x:\overline{n} }}{\ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)}}$ $= \frac{d^{(m)} A_{x:\overline{n} }}{1 - {}_hE_x - \frac{i}{i^{(m)}} A_{x:\overline{n} }^1}$ <p>(UDD)</p>	
$(n$ 年缴费) n 年延期 终身生存年金	$P({}_n\ddot{a}_x) = \frac{{}_n\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n} }}$	$\bar{P}({}_n\bar{a}_x) = \frac{{}_n\bar{a}_x}{\bar{a}_{x:\overline{n} }}$			
h 年限期缴费 n 年延期 终身生存年金	${}_hP({}_n\ddot{a}_x) = \frac{{}_n\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n} }}$				

第四章 均衡纯保费的责任准备金

1. 责任准备金的计算原理

(1)过去法：时刻 t 的准备金 = 已缴纯保费在时刻 t 的精算积累值 - 以往保险利益在时刻 t 的精算积累值；

(2)未来法：时刻 t 的准备金 = 未来保险利益在时刻 t 的精算现值 - 未缴纯保费在时刻 t 的精算现值。

2. ${}_nE_x = v^n \cdot {}_np_x$ 为 x 岁的人在第 n 年末仍然生存时 1 个单位的精算现值；而 $\frac{1}{{}_nE_x}$ 则为 1 个单位当 x 岁的人在第 n 年末仍然生存时的精算积累值。

3. 责任准备金的计算

(1)全离散式寿险模型，时刻 k 的未来损失 ${}_kL$ = 未来保险利益在时刻 k 的精算现值 - 未缴纯保费在时刻 k 的精算现值；

(2)全连续式寿险模型，时刻 t 的未来损失 ${}_tL$ = 未来保险利益在时刻 t 的精算现值 - 未缴纯保费在时刻 t 的精算现值。

注：默认均为未来法公式。

责任准备金 V	全离散式寿险模型	全连续式寿险模型
(终身缴费) 终身寿险	${}_kV_x = A_{x+k} - P_x \ddot{a}_{x+k} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}$ $= \frac{P_x \ddot{a}_{x:\overline{k} }}{{}_kE_x} - \frac{A^1_{x:\overline{k} }}{{}_kE_x} \text{ (过去法公式)}$ <p>递推公式 $l_{x+t}({}_tV_x + P_t)(1+i) = d_{x+t} \cdot b_{t+1} + l_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V_x$</p> $= d_{x+t}(b_{t+1} - {}_{t-1}V_x) + l_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_x$ $({}_tV_x + P_t)(1+i) = q_{x+t} \cdot b_{t+1} + p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_x$ $= q_{x+t}(b_{t+1} - {}_{t-1}V_x) + {}_{t+1}V_x \text{ 其中}$ <p>P_t: 第 $t+1$ 年初付纯保费 $({}_tV_x + P_t)$: 第 $t+1$ 年初的责任准备金 b_{t+1}: 死亡年末赔付额 $(b_{t+1} - {}_{t-1}V_x)$: 第 $t+1$ 年的净风险保额</p>	${}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x) \bar{a}_{x+t} = 1 - \frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}$ $= [\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) - \bar{P}(\bar{A}_x)] \bar{a}_{x+t} \text{ (保费差公式)}$ $= \bar{A}_{x+t} [1 - \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\bar{P}(\bar{A}_{x+t})}] \text{ (缴清寿险公式)}$ $= \frac{\bar{P}(\bar{A}_x) \bar{a}_{x:\overline{t} }}{{}_tE_x} - \frac{A^1_{x:\overline{t} }}{{}_tE_x} \text{ (过去法公式)}$
	$E({}_kL) = {}_kV_x$ $D({}_kL) = [1 + \frac{P_x}{d}]^2 [{}^2A_{x+k} - (A_{x+k})^2]$	$E({}_tL) = {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ $D({}_tL) = [1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}]^2 [{}^2\bar{A}_{x+t} - (\bar{A}_{x+t})^2]$
h 年定期缴费 终身寿险	${}_hV_x = \begin{cases} A_{x+k} - {}_hP_x \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k} } & (k < h) \\ A_{x+k} & (k \geq h) \end{cases}$	${}_h\bar{V}(\bar{A}_x) = \begin{cases} \bar{A}_{x+t} - {}_h\bar{P}(\bar{A}_x) \bar{a}_{x+t:\overline{h-k} } & (t < h) \\ \bar{A}_{x+t} & (t \geq h) \end{cases}$

	$= \begin{cases} \frac{{}_hP_x \ddot{a}_{x:\overline{k} }}{{}_kE_x} - \frac{A^1_{x:\overline{k} }}{{}_kE_x} & (k < h) \\ \frac{{}_hP_x \ddot{a}_{x:\overline{h} }}{{}_kE_x} - \frac{A^1_{x:\overline{k} }}{{}_kE_x} & (k \geq h) \end{cases} \text{ (过去法公式)}$ $= \begin{cases} \frac{M_{x+k} - {}_hP_x(N_{x+k} - N_{x+n})}{D_{x+k}} & (k < h) \\ \frac{M_{x+k}}{D_{x+k}} & (k \geq h) \end{cases}$ $= \begin{cases} \frac{{}_hP_x(N_x - N_{x+k})}{D_{x+k}} - \frac{M_x - M_{x+k}}{D_{x+k}} & (k < h) \\ \frac{{}_hP_x(N_x - N_{x+h})}{D_{x+k}} - \frac{M_x - M_{x+k}}{D_{x+k}} & (k \geq h) \end{cases} \text{ (过去法公式)}$	
(n 年缴费) n 年定期保险	${}_kV^1_{x:n } = A^1_{x+k:n-\overline{k} } - P^1_{x:n } \ddot{a}_{x+k:n-\overline{k} } \quad (k < n)$ $= \frac{P^1_{x:n } \ddot{a}_{x:\overline{k} }}{{}_kE_x} - \frac{A^1_{x:\overline{k} }}{{}_kE_x} \text{ (过去法公式)}$	${}_t\bar{V}(\bar{A}^1_{x:n }) = \bar{A}^1_{x+t:n-\overline{t} } - \bar{P}(\bar{A}^1_{x:n }) \bar{a}_{x+t:n-\overline{t} } \quad (t < n)$ $= [\bar{P}(\bar{A}^1_{x+t:n-\overline{t} }) - \bar{P}(\bar{A}^1_{x:n })] \bar{a}_{x+t:n-\overline{t} } \text{ (保费差公式)}$ $= \bar{A}^1_{x+t:n-\overline{t} } [1 - \frac{\bar{P}(\bar{A}^1_{x:n })}{\bar{P}(\bar{A}^1_{x+t:n-\overline{t} })}] \text{ (缴清寿险公式)}$

		$= \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:n}^1) \bar{a}_{x:t}}{E_x} - \frac{\bar{A}_{x:t}^1}{E_x} \text{ (过去法公式)}$
(n 年缴费) n 年两全保险	${}_k V_{x:n} = \begin{cases} A_{x+k:n-k} - P_{x:n} \ddot{a}_{x+k:n-k} & (k < n) \\ 1 & (k = n) \end{cases}$ $= \frac{P_{x:n} \ddot{a}_{x:k}}{E_x} - \frac{A_{x:k}^1}{E_x} \text{ (过去法公式)}$	${}_t \bar{V}(\bar{A}_{x:n}) = \begin{cases} \bar{A}_{x+t:n-t} - \bar{P}(\bar{A}_{x:n}) \bar{a}_{x+t:n-t} & (t < n) \\ 1 & (t = n) \end{cases}$ $= [\bar{P}(\bar{A}_{x+t:n-t}) - \bar{P}(\bar{A}_{x:n})] \bar{a}_{x+t:n-t} \text{ (保费差公式)}$ $= \bar{A}_{x+t:n-t} [1 - \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:n})}{\bar{P}(\bar{A}_{x+t:n-t})}] \text{ (缴清寿险公式)}$ $= \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:n}) \bar{a}_{x:t}}{E_x} - \frac{\bar{A}_{x:t}^1}{E_x} \text{ (过去法公式)}$
h 年限期缴费 n 年定期保险	${}_k^h V_{x:n}^1 = \begin{cases} A_{x+k:n-k}^1 - {}_h P_{x:n}^1 \ddot{a}_{x+k:h-k} & (k < h) \\ A_{x+k:n-k}^1 & (h \leq k < n) \end{cases}$ $= \begin{cases} \frac{{}_h P_{x:n}^1 \ddot{a}_{x:k}}{E_x} - \frac{A_{x:k}^1}{E_x} & (k < h) \\ \frac{{}_h P_{x:n}^1 \ddot{a}_{x:h}}{E_x} - \frac{A_{x:k}^1}{E_x} & (k \geq h) \end{cases} \text{ (过去法公式)}$	${}_t^h \bar{V}(\bar{A}_{x:n}^1) = \begin{cases} \bar{A}_{x+t:n-t}^1 - {}_h \bar{P}(\bar{A}_{x:n}^1) \bar{a}_{x+t:h-t} & (t < h) \\ \bar{A}_{x+t:n-t}^1 & (h \leq t < n) \end{cases}$

h 年限期缴费 n 年两全保险	${}_k^h V_{x:n} = \begin{cases} A_{x+k:n-k} - {}_h P_{x:n} \ddot{a}_{x+k:h-k} & (k < h) \\ A_{x+k:n-k} & (h \leq k < n) \\ 1 & (k = n) \end{cases}$ $= \begin{cases} \frac{{}_h P_{x:n} \ddot{a}_{x:k}}{E_x} - \frac{A_{x:k}^1}{E_x} & (k < h) \\ \frac{{}_h P_{x:n} \ddot{a}_{x:h}}{E_x} - \frac{A_{x:k}^1}{E_x} & (k \geq h) \end{cases} \text{ (过去法公式)}$	${}_t^h \bar{V}(\bar{A}_{x:n}) = \begin{cases} \bar{A}_{x+t:n-t} - {}_h \bar{P}(\bar{A}_{x:n}) \bar{a}_{x+t:h-t} & (t < h) \\ \bar{A}_{x+t:n-t} & (h \leq t < n) \\ 1 & (t = n) \end{cases}$
(n 年缴费) n 年延期 终身生存年金	${}_k V_{(n)}(\ddot{a}_x) = \begin{cases} \ddot{a}_{x+n} v^{n-k} {}_{n-k} P_{x+k} - P_{(n)}(\ddot{a}_x) \ddot{a}_{x+k:n-k} & (k < n) \\ \ddot{a}_{x+k} & (k \geq n) \end{cases}$ $= \begin{cases} \frac{P_{(n)}(\ddot{a}_x) \ddot{a}_{x:k}}{E_x} & (k < n) \\ \frac{P_{(n)}(\ddot{a}_x) \ddot{a}_{x:n}}{E_x} - \frac{{}_n \ddot{a}_{x:k:n}}{E_x} & (k \geq n) \end{cases} \text{ (过去法公式)}$ $= \begin{cases} \frac{P_{(n)}(\ddot{a}_x) N_x - N_{x+k}}{D_{x+k}} \text{ (过去法公式)} & (k < n) \\ \frac{N_{x+k}}{D_{x+k}} & (k \geq n) \end{cases}$	${}_t \bar{V}_{(n)}(\bar{a}_x) = \begin{cases} \bar{a}_{x+n} v^{n-t} {}_{n-t} P_{x+t} - \bar{P}_{(n)}(\bar{a}_x) \bar{a}_{x+t:n-t} & (t < n) \\ \bar{a}_{x+t} & (t \geq n) \end{cases}$ $= \begin{cases} \frac{\bar{P}_{(n)}(\bar{a}_x) \bar{a}_{x:t}}{E_x} & (t < n) \\ \frac{\bar{P}_{(n)}(\bar{a}_x) \bar{a}_{x:n}}{E_x} - \frac{{}_n \bar{a}_{x:t-n}}{E_x} & (t \geq n) \end{cases} \text{ (过去法公式)}$
h 年限期缴费 n 年延期 终身生存年金		${}_t^h \bar{V}_{(n)}(\bar{a}_x) = \begin{cases} \bar{a}_{x+n} v^{n-t} {}_{n-t} P_{x+t} - {}_h \bar{P}_{(n)}(\bar{a}_x) \bar{a}_{x+t:h-t} & (t < h) \\ \bar{a}_{x+n} v^{n-t} {}_{n-t} P_{x+t} & (h \leq t < n) \\ \bar{a}_{x+t} & (t \geq n) \end{cases}$

责任准备金 V	半连续式寿险模型
(终身缴费) 终身寿险	${}_tV(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+t} - P(\bar{A}_x)\ddot{a}_{x+t}$ $= \frac{i}{\delta} {}_tV_x (\text{UDD})$
h 年定期缴费 终身寿险	${}_t^hV(\bar{A}_x) = \begin{cases} \bar{A}_{x+t} - {}_hP(\bar{A}_x)\ddot{a}_{x+t:h-t} & (t < h) \\ \bar{A}_{x+t} & (t \geq h) \end{cases}$ $= \frac{i}{\delta} {}_t^hV_x (\text{UDD})$
(n 年缴费) n 年定期保险	${}_tV(\bar{A}_{x:n}^1) = \bar{A}_{x+t:n-t}^1 - P(\bar{A}_{x:n}^1)\ddot{a}_{x+t:n-t} \quad (t < n)$ $= \frac{i}{\delta} {}_tV_{x:n}^1 (\text{UDD})$
(n 年缴费) n 年两全保险	${}_tV(\bar{A}_{x:n}) = \begin{cases} \bar{A}_{x+t:n-t} - P(\bar{A}_{x:n})\ddot{a}_{x+t:n-t} & (t < n) \\ 1 & (t = n) \end{cases}$ $= \frac{i}{\delta} ({}_tV_{x:n}^1 + {}_tV_{x:n}^{\bar{1}}) (\text{UDD})$
h 年定期缴费 n 年定期保险	${}_t^hV(\bar{A}_{x:n}^1) = \begin{cases} \bar{A}_{x+t:n-t}^1 - {}_hP(\bar{A}_{x:n}^1)\ddot{a}_{x+t:h-t} & (t < h) \\ \bar{A}_{x+t:n-t}^1 & (h \leq t < n) \end{cases}$ $= \frac{i}{\delta} {}_t^hV_{x:n}^1 (\text{UDD})$
h 年定期缴费 n 年两全保险	${}_t^hV(\bar{A}_{x:n}) = \begin{cases} \bar{A}_{x+t:n-t} - {}_hP(\bar{A}_{x:n})\ddot{a}_{x+t:h-t} & (t < h) \\ \bar{A}_{x+t:n-t} & (h \leq t < n) \\ 1 & (t = n) \end{cases}$ $= \frac{i}{\delta} ({}_t^hV_{x:n}^1 + {}_t^hV_{x:n}^{\bar{1}}) (\text{UDD})$

责任准备金 V	每年分 m 次真实缴费	比例保费	趸缴纯保费
终身寿险	${}_tV_x^{(m)} = A_{x+t} - P_x^{(m)} \ddot{a}_{x+t}^{(m)}$ ${}_tV_x^{(m)} - {}_tV_x = \beta(m) P_x^{(m)} {}_tV_x, \text{ 其中}$ $\beta(m) = \frac{i^{(m)} - i}{i^{(m)} d^{(m)}}$	${}_tV^{(m)}(\bar{A}_x) = {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ ${}_tV^{(1)}(\bar{A}_x) = {}_tV(\bar{A}_x) + {}_tV(\bar{A}_x^{\text{PR}}) = {}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$	${}_kV_x = A_{x+k}$ $= \frac{A_x}{{}_kE_x} - \frac{A_{x:\overline{k} }^1}{{}_kE_x} \text{ (过去法公式)}$
	每年分 2 次真实缴费的责任准备金 V 的近似计算 $\begin{cases} {}_{k+s}V_x^{(2)} \approx (1-s) \cdot {}_kV_x^{(2)} + s \cdot {}_{k+1}V_x^{(2)} + (\frac{1}{2}-s)P_x^{(2)} & (0 < s < \frac{1}{2}) \\ {}_{k+s}V_x^{(2)} \approx (1-s) \cdot {}_kV_x^{(2)} + s \cdot {}_{k+1}V_x^{(2)} + (1-s)P_x^{(2)} & (\frac{1}{2} < s < 1) \end{cases}$ 假设 UDD, 且年利率 i 与 q_{x+k} 均很小。		$E({}_kL) = {}_kV_x$ $D({}_kL) = {}_k^2A_{x+k} + (A_{x+k})^2$
终身生存年金			${}_kV_x = \ddot{a}_{x+k}$ $= \frac{\ddot{a}_x}{{}_kE_x} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{k} }}{{}_kE_x} \text{ (过去法公式)}$
			$E({}_kL) = \ddot{a}_{x+k}$ $D({}_kL) = \frac{1}{d^2} [{}^2A_{x+k} - (A_{x+k})^2]$

第五章 总保费与修正准备金

1. 总保费厘订原理：总保费的精算现值=保险给付的精算现值+保险费用的精算现值

对于保额为 b 的保单，总保费为 $G(b)=ab+c+fG(b)$ ，其中 a 为直接与保额变化相联系的那些保险成本的组成部分，每单位保额是其中最大的部分， c 为保单费用， f 是随保费变化的用于支付费用的保费比例，于是

$$G(b)=b\frac{a+\frac{c}{b}}{1-f}=bR(b), \text{ 其中 } R(b)=\frac{a+\frac{c}{b}}{1-f} \text{ 即为保额为 } b \text{ 的保单的费率。}$$

2. 保险费率的计算方法

(1) 分级费率法：将保单根据保额分成若干等级，在每一等级内根据保额的分布求出保额均值，再以该均值通过 $R(b)=\frac{a+\frac{c}{b}}{1-f}$ 计算出一个费率作为该等级内所有保单的费率。

(2) 保单费附加法：设 $R(b)=\frac{a+\frac{c}{b}}{1-f}=a'+\frac{c'}{b}$ ，其中 $a'=\frac{a}{1-f}$ ， $c'=\frac{c}{1-f}$ ，则总保费 $G(b)=bR(b)=ba'+c'$ 。显然 a' 是没有考虑保单费用时的费率， c' 称为保单费（不同于保单费用 c ）。当加进保单费用而使总保费增加时，代理人佣金、保费税等按保费百分比计算的支出亦相应增加，这时总保费的增加数即保单费 $\frac{c}{1-f}>c$ 。

3. 总保费准备金

过去法：总保费准备金=过去总保费收入的精算积累值-过去保险给付与费用支出的精算积累值

未来法：总保费准备金=未来保险给付与费用支出的精算现值-未来总保费收入的精算现值

若定义包含费用的损失变量 L_e =未来保险给付与费用支出的现值-未来总保费收入的现值，则 $E(L_e)$ 即为总保费准备金。

4. 预期盈余的计算

(1) 不考虑费用

$${}_hV_x({}_{h-1}V_x+P_x)(1+i)-{}_hV_x\cdot q_{x+h-1}-{}_hP_x\cdot {}_hV_x+u(h)$$

结论：在没有初始基金、利润及意外灾难附加保费时，预期盈余总是 0。

(2) 考虑费用

$${}_hV_x\{[{}_{h-1}V_x+u(h-1)]+(P_x+c)-e_{h-1}\}(1+i)-{}_hP_x\cdot q_{x+h-1}-{}_hP_x\cdot [{}_hV_x+u(h)]$$

$(h=1,2,3,\dots)$ ，其中 $u(h)$ 为第 h 年的目标盈余，于是

$${}_hP_xu(h)=\sum_{j=1}^h(1+i)^{h-j+1}\cdot {}_{j-1}P_x(c-e_{j-1})$$

结论：第 h 期预期盈余是前面各期的贡献 ${}_{j-1}P_x(c-e_{j-1})$ 的积累值。

5. 在考虑费用计算预期盈余时，对于较小的 h ，预期盈余可能是负值，因为保单初期费用较大，因此就会出现资产小于负债的情况，可能采用的几种解决办法有：

$$(1) \text{ 拥有附加资本，即 } u(0)>0, \text{ 使得 } u(0)(1+i)^h+\sum_{j=1}^h(1+i)^{h-j+1}\cdot {}_{j-1}P_x(c-e_{j-1}),$$

对 $h=1,2,3,\dots$ 均为正数；

(2) 附加保费随保单年度变化，使得 $(c_{h-1}-e_{h-1})\geq 0 (h=1,2,3,\dots)$ ；

(3) 采用修正准备金原理，减小最初几个保单年度的准备金。

6. 修正准备金的一般方法：初年度纯保费为 α ；往后 $j-1$ 年纯保费为 β ； j 年之后的纯保费即为原来的均衡纯保费 P ，于是有：

$$(1) \alpha+\beta a_{x:j-1|}+P\cdot \ddot{a}_{x:h-j|}=P\cdot \ddot{a}_{x:h|}$$

$$(2) \alpha+\beta a_{x:j-1|}=P\cdot \ddot{a}_{x:j|}, \text{ 另两个常用形式为 } \beta=P+\frac{P-\alpha}{a_{x:j-1|}}, \beta=P+\frac{\beta-\alpha}{\ddot{a}_{x:j|}}.$$

7. 一年定期修正制(FPT)

$$(1) \text{ 对于离散型寿险，由于 } {}_1V_x^{\text{FPT}}=\frac{\alpha-A_{x:1|}^1}{{}_1E_x}\geq 0, \text{ 则取初年度纯保费 } \alpha=A_{x:1|}^1, \text{ 并}$$

$$\text{使整个缴费期为修正期，于是续年度纯保费 } \beta=\frac{A_{x+1:h-1|}^1}{\ddot{a}_{x+1:h-1|}};$$

$$(2) \text{ 对于连续型寿险，由于 } {}_1\bar{V}_x^{\text{FPT}}=\frac{\bar{\alpha}\bar{a}_{x:1|}-\bar{A}_{x:1|}^1}{{}_1E_x}\geq 0, \text{ 则取初年度纯保费 } \bar{\alpha}=\frac{\bar{A}_{x:1|}^1}{\bar{a}_{x:1|}},$$

$$\text{并使整个缴费期为修正期，于是续年度纯保费 } \bar{\beta}=\frac{\bar{A}_{x+1:h-1|}^1}{\bar{a}_{x+1:h-1|}}.$$

8. 在均衡纯保费准备金方法(NLP)中 $G=P+C$ ；而在 FPT 法中 $G=A_{x:1|}^1+C_0=\beta+C_1$ ，

其中 C_0 为初年度附加保费, C_1 为续年度附加保费, 于是 $C_0 = C + (P - A_{x:\overline{1}|}^1)$, 即相当

于 FPT 法在初年度提供了一个费用补贴 $(P - A_{x:\overline{1}|}^1)$ 。

9. 保单分类修正制: 美国保险监督官标准(CRVM)

(1) 满足 $\beta^{\text{FPT}} > {}_{19}P_{x+1}$ 的保单为高保费保单, 其中 β^{FPT} 为该寿险按 20 年缴费使用 FPT 法时的续年度纯保费;

(2) FPT 法为提存低保费保单准备金的最低要求;

(3) 对于高保费保单, 使用一特定的保险监督官准备金算法(简记为 Com), 这个方法中规定保费缴纳期为修正期, 并且 $\beta^{\text{Com}} - \alpha^{\text{Com}} = {}_{19}P_{x+1} - A_{x:\overline{1}|}^1$, 于是

$$\beta^{\text{Com}} = P + \frac{{}_{19}P_{x+1} - A_{x:\overline{1}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}, \text{ 其中 } h \text{ 为缴费年限。}$$

10. 加拿大责任准备金修正法

若 $C_0 = C + (P - A_{x:\overline{1}|}^1) < e_0$, 则准备金标准可以比一年定期修正制更低。

(1) 若所承保险种的均衡纯保费 P 小于或等于相同年龄投保的终身寿险均衡纯保费 P_x 时, 用 FPT 修正法计算;

(2) 若 $P > P_x$ 时, 用加拿大修正法计算;

(3) 加拿大修正法在全部缴费期修正纯保费, 且规定保险第 1 年均衡纯保费中可用于营业费用支出的部分等于 $(P_x - A_{x:\overline{1}|}^1)$, 并且 $\alpha^{\text{can}} = P - (P_x - A_{x:\overline{1}|}^1)$, 于是

$$\beta^{\text{can}} = P + \frac{P - \alpha^{\text{can}}}{a_{x:\overline{h-1}|}} = P + \frac{P_x - A_{x:\overline{1}|}^1}{a_{x:\overline{h-1}|}}, \text{ 其中 } h \text{ 为缴费年限。}$$

第六章 多元生命函数

1. 一般地, 设 u 为一组生命的状态, 则

$${}_tq_u = P\{\text{状态 } u \text{ 在 } t \text{ 年内消失}\};$$

$${}_t|q_u = P\{\text{状态 } u \text{ 在第 } t+1 \text{ 年内消失}\}.$$

2. 联合生存状态 (xy) 与最后生存状态 (\overline{xy})

	联合生存状态 (xy)	相互间联系	最后生存状态 (\overline{xy})
定义	状态 x 与状态 y 均存在		状态 x 与状态 y 至少有一个存在
令	$T(xy)$ 为 (xy) 的未来存续时间随机变量	$T(xy) + T(\overline{xy}) = T(x) + T(y)$ $T(xy) \cdot T(\overline{xy}) = T(x) \cdot T(y)$	$T(\overline{xy})$ 为 (\overline{xy}) 的未来存续时间随机变量
分布函数	$F_{T(xy)}(t) = {}_tq_{xy} = 1 - {}_tp_x \cdot {}_tp_y$ $= {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_x \cdot {}_tq_y$	$F_{T(xy)}(t) + F_{T(\overline{xy})}(t) = F_{T(x)}(t) + F_{T(y)}(t)$	$F_{T(\overline{xy})}(t) = {}_tq_{\overline{xy}} = {}_tq_x \cdot {}_tq_y$ $= 1 - {}_tp_x - {}_tp_y + {}_tp_x \cdot {}_tp_y$
生存函数	${}_tp_{xy} = {}_tp_x \cdot {}_tp_y$	${}_tp_{xy} + {}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y$	${}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x \cdot {}_tp_y = 1 - {}_tq_x \cdot {}_tq_y$
密度函数	$f_{T(xy)}(t) = {}_tp_{xy} \cdot \mu_{xy+t}$ $= {}_tp_x \cdot {}_tp_y (\mu_{x+t} + \mu_{y+t})$	$f_{T(xy)}(t) + f_{T(\overline{xy})}(t) = f_{T(x)}(t) + f_{T(y)}(t)$	$f_{T(\overline{xy})}(t) = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} + {}_tp_y \cdot \mu_{y+t} -$ ${}_tp_x \cdot {}_tp_y (\mu_{x+t} + \mu_{y+t})$

死力	$\mu_{xy+t} = \mu_{x+t} + \mu_{y+t}$		$\mu_{\overline{xy}+t} = \frac{f_{T(\overline{xy})}(t)}{1 - F_{T(\overline{xy})}(t)}$
	${}_t q_{xy} = {}_tp_{xy}(1 - {}_tp_{x+t} \cdot {}_tp_{y+t})$ $= {}_tp_x \cdot {}_tp_y ({}_t q_{x+t} + {}_t q_{y+t} - {}_t q_{x+t} \cdot {}_t q_{y+t})$	${}_t q_{xy} + {}_t q_{\overline{xy}} = {}_t q_x + {}_t q_y$	${}_t q_{\overline{xy}} = {}_tq_x \cdot {}_tp_y \cdot {}_tq_{y+t} + {}_tq_y \cdot {}_tp_x \cdot {}_tq_{x+t} -$ ${}_tp_x \cdot {}_tp_y \cdot {}_tq_{x+t} \cdot {}_tq_{y+t}$
未来期望寿命	$\dot{e}_{xy} = E[T(xy)]$ $= \int_0^{+\infty} {}_tp_{xy} \cdot \mu_{xy+t} dt = \int_0^{+\infty} {}_tp_{xy} dt$	$\dot{e}_{xy} + \dot{e}_{\overline{xy}} = \dot{e}_x + \dot{e}_y$	$\dot{e}_{\overline{xy}} = E[T(\overline{xy})]$
	$D[T(xy)] = E[T^2(xy)] - \{E[T(xy)]\}^2$ $= \int_0^{+\infty} t^2 \cdot {}_tp_{xy} \cdot \mu_{xy+t} dt - (\dot{e}_{xy})^2$ $= 2 \int_0^{+\infty} t \cdot {}_tp_{xy} dt - (\dot{e}_{xy})^2$	$\text{Cov}[T(xy), T(\overline{xy})]$ $= E[T(xy) \cdot T(\overline{xy})] - E[T(xy)] \cdot E[T(\overline{xy})]$ $= (\dot{e}_x - \dot{e}_{xy})(\dot{e}_y - \dot{e}_{xy}) > 0$	$D[T(\overline{xy})] = E[T^2(\overline{xy})] - \{E[T(\overline{xy})]\}^2$ $= 2 \int_0^{+\infty} t \cdot {}_tp_{\overline{xy}} dt - (\dot{e}_{\overline{xy}})^2$
未来期望 整数寿命	$e_{xy} = E[K(xy)]$ $= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot {}_kp_{xy} \cdot q_{xy+k} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_{xy}$	$e_{xy} + e_{\overline{xy}} = e_x + e_y$	$e_{\overline{xy}} = E[K(\overline{xy})] = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_{\overline{xy}}$
离散型终身寿险 趸缴纯保费	$A_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_kp_{xy} \cdot q_{xy+k}$	$A_{xy} + A_{\overline{xy}} = A_x + A_y$	
	$Z = v^T, D(Z) = {}^2A_{xy} - (A_{xy})^2$		

离散型 终身生存年金	$\ddot{a}_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_{xy} = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1} } \cdot {}_k q_{xy}$ $= \frac{1}{d} (1 - A_{xy})$	$\ddot{a}_{xy} + \ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y$	
连续型终身寿险 趸缴纯保费	$\bar{A}_{xy} = \int_0^{+\infty} v^t \cdot {}_t p_{xy} \cdot \mu_{xy+t} dt$	$\bar{A}_{xy} + \bar{A}_{\overline{xy}} = \bar{A}_x + \bar{A}_y$	
		$\text{Cov}[v^{T(xy)}, v^{T(\overline{xy})}]$ $= E[v^{T(xy)} \cdot v^{T(\overline{xy})}] - E[v^{T(xy)}] \cdot E[v^{T(\overline{xy})}]$ $= (\bar{A}_x - \bar{A}_{xy})(\bar{A}_y - \bar{A}_{\overline{xy}})$	
连续型 终身生存年金	$\bar{a}_{xy} = \int_0^{+\infty} v^t \cdot {}_t p_{xy} dt$ $= \int_0^{+\infty} \bar{a}_{\overline{t} } \cdot {}_t p_{xy} \cdot \mu_{xy+t} dt$ $= \frac{1}{\delta} (1 - \bar{A}_{xy})$	$\bar{a}_{xy} + \bar{a}_{\overline{xy}} = \bar{a}_x + \bar{a}_y$	
每年付 m 次的 终身生存年金	$\ddot{a}_{xy}^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}} (1 - A_{xy}^{(m)})$		

3. 在特殊假设下联合生存函数及其趸缴纯保费的估值

Gompertz 假设	Makeham 假设	UDD 假设
$\mu_{xy+t} = Bc^{x+t} + Bc^{y+t}$	$\mu_{xy+t} = 2A + Bc^{x+t} + Bc^{y+t}$	${}_t p_{xy} \cdot \mu_{xy+t} = {}_t q_{xy} + (1-2t)q_x \cdot q_y$
对应单一生命	对应联合生命	
$\mu_{w+t} = \mu_{xy+t} = Bc^{w+t}$	$\mu_{w+t} = \mu_{xy+t} = 2A + 2Bc^{w+t}$	$\bar{A}_{xy} \approx \frac{i}{\delta} \cdot A_{xy} (T(x), T(y) \sim \text{UDD})$
$c^w = c^x + c^y$	$2c^w = c^x + c^y$	$\bar{A}_{xy} = \frac{i}{\delta} \cdot A_{xy} (T(xy) \sim \text{UDD})$
${}_t p_{xy} = {}_t p_w$	${}_t p_{ww} = ({}_t p_w)^2 = {}_t p_x \cdot {}_t p_y$	$A_{xy}^{(m)} \approx \frac{i}{i^{(m)}} \cdot A_{xy} (T(x), T(y) \sim \text{UDD})$
若 $y = x + n$, $w = x + t$, 则	若 $y = x + n$, $w = x + t$, 则	$A_{xy}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} \cdot A_{xy} (T(xy) \sim \text{UDD})$
$c^{x+t} = c^x + c^{x+n}$	$2c^{x+t} = c^x + c^{x+n}$	
$t = \frac{\ln(1+c^n)}{\ln c}$	$t = \frac{\ln(1+c^n) - \ln 2}{\ln c}$	
	${}_t p_x + {}_t p_y \geq 2{}_t p_w$	
	$a_{xy}^- \geq a_{ww}^-$	

4. 考虑死亡顺序的生存模型及其趸缴纯保费

(1) x 在 y 之前并且在 n 年内死亡 ${}_n q_{xy}^1 = \int_0^n {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} \cdot {}_t p_y \cdot dt = \int_0^n {}_t p_{xy} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$

$${}_n q_{xy}^1 = \frac{c^x}{c^x + c^y} {}_n q_{xy} \quad (\text{Gompertz 假设})$$

$${}_n q_{xy}^1 = \frac{c^x}{c^x + c^y} {}_n q_{xy} + A(1 - \frac{2c^x}{c^x + c^y}) e^{-\frac{xy:n}{|}} \quad (\text{Makeham 假设})$$

$$A_{xy}^1 = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_k q_{xy}^1 = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_k q_x \cdot {}_k p_y (1 - \frac{1}{2} q_{x+k})$$

$$\bar{A}_{xy}^1 = \int_0^{+\infty} v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} \cdot {}_t p_y \cdot dt = \int_0^{+\infty} v^t \cdot {}_t p_{xy} \cdot \mu_{x+t} \cdot dt$$

(2) x 在 y 之后并且在 n 年内死亡 ${}_n q_{xy}^2 = \int_0^n {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} \cdot (1 - {}_t p_y) dt = {}_n q_x - {}_n q_{xy}^1$

$$\bar{A}_{xy}^2 = \int_0^{+\infty} v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} \cdot (1 - {}_t p_y) dt = \bar{A}_x - \bar{A}_{xy}^1$$

第七章 多元风险模型

1. 设 $T(x)$ 为 (x) 的未来生存时间随机变量, 概率密度函数为 $g(t)$; $J(x)$ 表示 (x) 终止原因随机变量, 分布律为 $P\{J=j\} = h(j)$; $f(t, j)$ 为 T, J 的联合概率密度函数, $F(t, j)$ 为其分布函数, 则

$$g(t) = \sum_{j=1}^m f(t, j) = {}_t p_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(\tau)} \quad f(t, j) = {}_t p_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)}$$

$$h(j | T = t) = \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}} \quad h(j | T \leq t) = \frac{{}_t q_x^{(j)}}{{}_t q_x^{(\tau)}}$$

2. 生存分布与生命表函数之间的关系

$${}_t q_x^{(j)} = F(t, j) = \int_0^t f(t, j) dt = \int_0^t {}_t p_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)} dt \quad {}_{\infty} q_x^{(j)} = h(j)$$

$${}_t q_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m {}_t q_x^{(j)} = G(t) = \int_0^t g(t) dt = \int_0^t {}_t p_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(\tau)} dt \quad {}_t p_x^{(\tau)} = 1 - {}_t q_x^{(\tau)}$$

$$q_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m q_x^{(j)} = 1 - p_x^{(\tau)}$$

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{\frac{\partial}{\partial t} {}_t q_x^{(j)}}{{}_t p_x^{(\tau)}} \quad \mu_{x+t}^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m \mu_{x+t}^{(j)}$$

$$\mu_x^{(j)} = \frac{-\frac{\partial}{\partial x} l_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} \quad \mu_x^{(\tau)} = \frac{-\frac{\partial}{\partial x} l_x^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}$$

$$l_{x+t}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} \cdot p_x^{(\tau)} \quad l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} \cdot p_x^{(\tau)}$$

$$l_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m l_x^{(j)} = \int_0^{\infty} l_{x+t}^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(\tau)} dt, \quad \text{其中 } l_x^{(j)} = \sum_{t=0}^{\infty} d_{x+t}^{(j)} = \int_0^{\infty} l_{x+t}^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)} dt$$

$${}_t d_x^{(j)} = l_x^{(j)} - l_{x+t}^{(j)} = l_x^{(\tau)} \cdot {}_t q_x^{(j)} = \int_0^t l_{x+t}^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)} dt$$

$$d_x^{(j)} = l_x^{(j)} - l_{x+1}^{(j)} = l_x^{(\tau)} \cdot q_x^{(j)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)} dt$$

$${}_t d_x^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - l_{x+t}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} \cdot {}_t q_x^{(\tau)} = \int_0^t l_{x+t}^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(\tau)} dt$$

$$d_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m d_x^{(j)} = l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} \cdot q_x^{(\tau)} = \int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(\tau)} dt$$

3. 伴随单风险模型的生存分布函数

$${}_t p_x^{(j)} = \exp[-\int_0^t \mu_{x+t}^{(j)} dt]$$

$${}_t p_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^m {}_t p_x^{(j)} = \exp[-\int_0^t \mu_{x+t}^{(\tau)} dt]$$

$${}_t q_x^{(j)} = \int_0^t {}_t p_x^{(j)} \cdot \mu_{x+t}^{(j)} dt = 1 - {}_t p_x^{(j)} \quad {}_t q_x^{(\tau)} = \int_0^t {}_t p_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(\tau)} dt$$

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{-\frac{\partial}{\partial t} {}_t p_x^{(j)}}{{}_t p_x^{(j)}} = \frac{\frac{\partial}{\partial t} {}_t q_x^{(j)}}{{}_t p_x^{(j)}} = \frac{\frac{\partial}{\partial t} {}_t q_x^{(\tau)}}{{}_t p_x^{(\tau)}}$$

(1) 至少存在一个 j , 使得 $\int_0^\infty \mu_{x+t}^{(j)} dt = \infty$;

(2) $0 \leq {}_t p_x^{(\tau)} \leq {}_t p_x^{(j)} \leq {}_t p_x^{(j)} \leq 1$, $0 \leq p_x^{(\tau)} \leq p_x^{(j)} \leq p_x^{(j)} \leq 1$;

$$0 \leq {}_t q_x^{(j)} \leq {}_t q_x^{(j)} \leq {}_t q_x^{(\tau)} \leq 1, \quad 0 \leq q_x^{(j)} \leq q_x^{(j)} \leq q_x^{(\tau)} \leq 1.$$

4. 中心终止率

$$\text{原因 } j \text{ 的中心终止率: } m_x^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt}{\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} dt} = \frac{\int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt}{\int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} dt} = \frac{q_x^{(j)}}{\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} dt}$$

$$\text{全中心终止率: } m_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m m_x^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)} dt}{\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} dt} = \frac{\int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)} dt}{\int_0^1 l_{x+t}^{(\tau)} dt} = \frac{q_x^{(\tau)}}{\int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} dt}$$

$$\text{伴随单风险模型的中心终止率: } m_x^{(j)} = \frac{\int_0^1 {}_t p_x^{(j)} \mu_{x+t}^{(j)} dt}{\int_0^1 {}_t p_x^{(j)} dt} = \frac{q_x^{(j)}}{\int_0^1 {}_t p_x^{(j)} dt}$$

(1) 若 $\mu_{x+t}^{(j)} = \mu_x^{(j)}$, 则 $m_x^{(j)} = m_x^{(j)} = \mu_x^{(j)}$;

(2) 若 $\mu_{x+t}^{(j)}$ 是 t 的递增函数, 则 $m_x^{(j)} > m_x^{(j)}$;

若 $\mu_{x+t}^{(j)}$ 是 t 的递减函数, 则 $m_x^{(j)} < m_x^{(j)}$ 。

5. 在特殊假设条件下, 终止概率与独立终止率的关系

(1) 常值终止力假设, 即 $\mu_{x+t}^{(j)} = \mu_x^{(j)}$, $\mu_{x+t}^{(\tau)} = \mu_x^{(\tau)}$ ($0 \leq t \leq 1$), 则

$$\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}} = \frac{\mu_x^{(j)}}{\mu_x^{(\tau)}} = \frac{\ln p_x^{(j)}}{\ln p_x^{(\tau)}}, \text{ 从而 } p_x^{(j)} = [p_x^{(\tau)}]^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}}.$$

(2) 均匀分布假设, 即 ${}_t q_x^{(j)} = t \cdot q_x^{(j)}$, ${}_t q_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m {}_t q_x^{(j)} = t \cdot \sum_{j=1}^m q_x^{(j)} = t \cdot q_x^{(\tau)}$, 则

$${}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} = q_x^{(j)}, \quad {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)} = q_x^{(\tau)}; \quad \frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}} = \frac{\ln p_x^{(j)}}{\ln p_x^{(\tau)}}, \text{ 从而 } p_x^{(j)} = [p_x^{(\tau)}]^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}}.$$

6. 趸缴纯保费

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(\tau)} = \sum_{j=1}^m A_x^{(j)}, \text{ 其中 } A_x^{(j)} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)};$$

$$\bar{A}_x = \int_0^{+\infty} v^t \cdot {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)} dt = \sum_{j=1}^m \bar{A}_x^{(j)}, \text{ 其中 } \bar{A}_x^{(j)} = \int_0^{+\infty} v^t \cdot {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt \approx \frac{i}{\delta} A_x^{(j)} \text{ (UDD)}.$$

$$\text{一般地, } \bar{A}_x = \sum_{j=1}^m \int_0^{+\infty} b_{x+t}^{(j)} v^t \cdot {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} dt \approx \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} b_{x+k+\frac{1}{2}}^{(j)} v^{k+\frac{1}{2}} \cdot {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} \text{ (UDD 假设下}$$

运用中点公式)。

第八章 养老金计划的精算方法

1. 养老金计划中退休给付和相应缴费(捐纳金)的精算现值的计算

(1) 多元风险模型： $l_{x+1}^{(r)} = l_x^{(r)} p_x^{(r)} = [1 - (q_x^{(d)} + q_x^{(w)} + q_x^{(r)} + q_x^{(i)})]$ ，其中

$q_x^{(d)}, q_x^{(w)}, q_x^{(r)}, q_x^{(i)}$ 分别表示死亡、解约、年老退休和残废退休的概率；

(2) 年薪比例函数：对于 x 岁加入养老金计划现年 $x+h$ 岁的员工，其在 $x+h$ 岁的实际年薪记为 $(AS)_{x+h}$ ，在 $x+h+t$ 岁的预期年薪记为 $(ES)_{x+h+t}$ ，则假设有一个年薪比例函数 S_y ，使得 $(ES)_{x+h+t} = (AS)_{x+h} \cdot \frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}}$ ；

(3) 投资回报率；

(4) 年金精算现值因子： $x+t$ 岁时(正常)年老退休的年金精算现值因子记为 \bar{a}_{x+t}^r ，

残废退休的年金精算现值因子记为 \bar{a}_{x+t}^i 。

2. 缴费(捐纳金)的精算现值

$$c(AS)_{x+h} \int_0^{\omega-x-h} v^t \cdot {}_t p_{x+h}^{(\tau)} \frac{S_{x+h+t}}{S_{x+h}} dt$$

$$\approx c \frac{(AS)_{x+h}}{S_{x+h}} \sum_{k=0}^{\omega-x-h-1} v^{k+\frac{1}{2}} \cdot {}_k p_{x+h}^{(\tau)} S_{x+h+k} \quad (\text{应用中点规则近似})$$

3. 年老退休给付

$R(x, h, t)$ 表示 x 岁加入计划现年 $x+h$ 岁的员工，将在 $x+h+t$ 岁获得立即或延期给付年金的年给付额。

现年 $x+h$ 岁的计划加入者过去的薪金总额记为 $(TPS)_{x+h}$ ，相应的年给付额部分则为 $f(TPS)_{x+h}$ 。

年老退休给付的精算现值

$$APV = \int_{f-x-h}^{\omega-x-h} v^t \cdot {}_t p_{x+h}^{(\tau)} \mu_{x+h+t}^{(r)} R(x, h, t) \bar{a}_{x+h+t}^r dt$$

$$\approx \sum_{k=f-x-h}^{\omega-x-h-1} v^{k+\frac{1}{2}} \cdot {}_k p_{x+h}^{(\tau)} q_{x+h+k}^{(r)} R(x, h, k + \frac{1}{2}) \bar{a}_{x+h+k+\frac{1}{2}}^r \quad (\text{应用中点规则近似}), \text{ 其中 } f$$

表示最低退休年龄， ω 表示最高退休年龄。

4. 残废退休给付

(1) 可能给付到一定年龄(如 65 岁)便转为年老退休给付；

(2) 计划加入者必须工作 5 年以上并在 65 岁以下时残废才能获得这项年金。

$R(x, 0, t)$ 表示给付额，若不能转成年老退休给付，则其精算现值为

$$\int_5^{65-x} v^t \cdot {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(i)} R(x, 0, t) \bar{a}_{x+t}^i dt$$

$$\approx \sum_{k=5}^{64-x} v^{k+\frac{1}{2}} \cdot {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(i)} R(x, 0, k + \frac{1}{2}) \bar{a}_{x+k+\frac{1}{2}}^i。$$

5. 解约给付与缴费(捐纳金)的退还

$(ATPC)_{x+h}$ 表示现年 $x+h$ 岁的计划加入者已缴费(捐纳金)按过去各年利率计算的到计算期的积累值，并假设这个积累值以后以年利率 j 积累，则在 $x+h+t$ 岁解约时相应这部分缴费(捐纳金)的退还额为 $B(x, h, t) = (ATPC)_{x+h}(1+j)^t$ ，其精算现值为

$$(ATPC)_{x+h} \sum_{k=0}^{\beta-x-h-1} v^{k+\frac{1}{2}} \cdot {}_k p_{x+h}^{(\tau)} q_{x+h+k}^{(w)} (1+j)^{k+\frac{1}{2}} \quad (\text{应用中点规则近似}), \text{ 其中 } \beta$$

是有资格获得立即或延期退休给付的年龄， $\beta > x+h$ ，并假设到达年龄 β 后不再有解约退还金。

计算期当年的缴费(捐纳金)设为年薪的 $c\%$ ，在当年解约时平均约退还一半，即

$\frac{1}{2}(0.01c)(AS)_{x+h}$ ，在此后第 $k+1$ 年解约时平均约退还 $(0.01c)(AS)_{x+h}(1+j)^k$ ，于是这部分缴费(捐纳金)到解约时退还额的精算现值为

$$(0.01c)(AS)_{x+h} \left[\frac{1}{2} v^{\frac{1}{2}} q_{x+h}^{(w)} + \sum_{k=1}^{\beta-x-h-1} v^{k+\frac{1}{2}} \cdot {}_k p_{x+h}^{(\tau)} q_{x+h+k}^{(w)} (1+j)^k \right]。$$